ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TỐNG THU TRANG

LÝ THUYẾT SỐ MŨ LYAPUNOV CHO NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TỐNG THU TRANG

LÝ THUYẾT SỐ MŨ LYAPUNOV CHO NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Toán Giải Tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: TS. HOÀNG THẾ TUẤN

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đề tài luận văn "**Lý thuyết số mũ Lyapunov cho nghiệm của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính**" không có sự sao chép của người khác. Khi viết luận văn tôi có tham khảo một số tài liệu, tất cả đều có nguồn gốc rõ ràng và được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Hoàng Thế Tuấn . Tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 6 năm 2020

Tác giả luận văn

Tống Thu Trang

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Hoàng Thế Tuấn - Viện Toán học đã tận tình chỉ dẫn và nhiệt tình đóng góp những ý kiến quý báu giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy, cô giáo trong khoa Sau đại học, khoa Toán trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo những điều kiện tốt nhất giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại khoa. Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy cô và các bạn ở trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện và nhiệt tình đóng góp ý kiến giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình tôi. Những người luôn yêu thương và ủng hộ tôi vô điều kiện.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 6 năm 2020

Người thực hiện

Tống Thu Trang

Mục lục

Lời nói đầu

Phép tính vi-tích phân là một công cụ lý tưởng để mô tả các quá trình tiến hóa. Thông thường, mỗi quá trình tiến hóa được biểu diễn bởi các phương trình vi phân thường. Bằng việc nghiên cứu (định tính hoặc định lượng) nghiệm của phương trình, người ta có thể biết trạng thái hiện thời cũng như dự đoán được dáng điệu ở quá khứ hay tương lai của quá trình đó. Tuy nhiên, các hiện tượng hay gặp trong cuộc sống có tính chất phụ thuộc vào lịch sử. Đối với các hiện tượng này, việc ngoại suy dáng điệu của nó tại một thời điểm tương lai từ quá khứ phụ thuộc cả vào quan sát địa phương lẫn toàn bộ quá khứ. Hơn nữa, sự phụ thuộc nói chung cũng không giống nhau ở tất cả các thời điểm. Phương trình vi phân phân thứ là một trong các lý thuyết ra đời để đáp ứng những yêu cầu đó.

Bài toán quan trọng trong lý thuyết định tính của phương trình vi phân là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm. Đối với trường hợp phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng, dáng điệu các nghiệm được mô tả đầy đủ thông qua phần thực các giá trị riêng của ma trận hệ số và bội của chúng. Với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số tuần hoàn, lý thuyết Floquet được sử dụng để mô tả cặn kẽ dáng điệu của tất cả các nghiệm, xem [1]. Đối với các hệ phương trình vi phân tuyến tính có hệ số biến thiên, phương pháp số mũ đặc trưng được đề xuất bởi Lyapunov, xem [1,6], là một công cụ rất hữu hiệu. Ý tưởng chính của phương pháp này là so sánh độ tăng trưởng hay suy giảm của nghiệm với hàm mũ. Độ tăng trưởng (suy giảm) được xác định thông qua số mũ đặc trưng (ngày nay gọi là số mũ Lyapunov cổ điển). Người ta biết rằng một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất trong không gian Euclide $\mathbb{R}^d$ có nhiều nhất d số mũ Lyapunov phân biệt. Tập tất cả các số mũ này cùng với bội của chúng được gọi là phổ Lyapunov. Nhiều tính chất quan trọng của phương trình như tính ổn định, tính hyperbolic, tính rẽ nhánh,...v.v, có thể được đặc trưng bởi phổ Lyapunov của nó.

Tuy nhiên, đối với phương trình vi phân phân thứ tuyến tính, người ta đã chứng minh được rằng số mũ Lyapunov của các nghiệm không tầm thường luôn không âm. Do đó, số mũ này không thể được dùng để đặc trưng cho tốc độ tăng trưởng hay suy giảm nghiệm của các loại phương trình này. Nó dẫn đến đòi hỏi là phải xây dựng một lý thuyết số mũ mới phù hợp cho các phương trình phân thứ. Trong năm 2014, các tác giả Nguyễn Đình Công, Đoàn Thái Sơn, Hoàng Thế Tuấn và Stefan Siegmund đã giải quyết được vấn đề nói trên và công bố các kết quả mới của họ trong bài báo [3,4]. Mục đích của luận văn này là trình bày lại kết quả trong [3,4]. Chúng tôi chia luận văn ra làm hai chương.

Chương 1: Giới thiệu các kiến thức chuẩn bị. Cụ thể như sau: Phần 1.1 giới thiệu những nét cơ sở về phương trình vi phân phân thứ tuyến tính; Phần 1.2 đề cập về cơ sở của lý thuyết số mũ Lyapunov cho các phương trình vi phân cổ điển; Phần 1.3 thảo luận số mũ Lyapunov cổ điển cho nghiệm của các phương trình vi phân phân thứ tuyến tính.

Chương 2: Trình bày về lý thuyết số mũ Lyapunov phân thứ cho các phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Chương này gồm ba phân chính. Thứ nhất, trong Phần 2.1, chúng tôi nói về số mũ Lyapunov phân thứ, cách tính số mũ này, một số tính chất cơ bản của số mũ Lyapunov phân thứ, phổ Lyapunov phân thứ cho các phương trình phân thứ tuyến tính và mối liên hệ giữa phổ Lyapunov với tính ổn định của các hệ này. Tiếp đến, trong Phần 2.2, chúng tôi thảo luận về cấu trúc phổ Lyapunov phân thứ cho các nghiệm xuất phát từ mặt cầu đơn vị của hệ phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Cuối cùng, chúng tôi tính số mũ Lyapunov phân thứ cho các nghiệm của một số phương trình vi phân phân thứ tuyến tính hai chiều hệ số hằng, xem Phần 2.3.

Do thời gian và năng lực có hạn, một số điểm trình bày trong luận văn có thể còn thiếu xót. Tác giả mong muốn nhận được sự góp ý của các thầy, các cô cũng như của các bạn đồng nghiệp.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các kiến thức cơ sở của luận văn. Nội dung của chương gồm ba phần chính. Phần 1.1 giới thiệu những nét cơ sở về phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Phần 1.2 đề cập về cơ sở của lý thuyết số mũ Lyapunov cho các phương trình vi phân cổ điển. Phần 1.3 thảo luận số mũ Lyapunov cổ điển cho nghiệm của các phương trình vi phân phân thứ tuyến tính.

1.1 Phương trình vi phân phân thứ tuyến tính

Phần này được dành để giới thiệu sơ lược về phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Nội dung chính của nó gồm bốn mục chính. Mục 1.1.1 nhắc lại khái niệm tích phân phân thứ Riemann–Liouville và một số tính chất của nó. Mục 1.1.2 nói về đạo hàm Riemann–Liouville, đạo hàm phân thứ Caputo và các tính chất cơ bản. Mục 1.1.3 thảo luận về sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của các phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Cuối cùng, Mục 1.1.4 liên quan tới các hàm Mittag-Leffler và dáng điệu tiệm cận của chúng.

1.1.1 Tích phân phân thứ

Hiểu theo một nghĩa nào đó, tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường. Cụ thể, cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, chúng ta định nghĩa *tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp* α của hàm $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ là

$$I^{\alpha}_{a+}x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau)\, d\tau \quad \text{với } t \in (a, b],$$

ở đây *hàm Gamma* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ có biểu diễn

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt,$$

xem [5, Definition 2.1, p. 13]. Khi $\alpha = 0$, chúng ta quy ước $I_{a+}^{0} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Dễ thấy trong định nghĩa ở trên, với $\alpha \in (0, 1)$, nếu x khả tích trên đoạn $[a, b]$, tức là $\int_a^b |x(t)|\, dt < \infty$, thì tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α của x tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$. Hơn nữa, chính bản thân tích phân này cũng là một hàm khả tích.

Bổ đề 1.1.1. *([5, Theorem 2.1]) Giả sử $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó, tích phân $I_{a+}^{\alpha} x(t)$ tồn tại với hầu hết $t \in [a, b]$. Hơn nữa, $I_{a+}^{\alpha} x$ cũng là một hàm khả tích trên $[a, b]$.*

Dưới đây là tích phân của một số hàm đơn giản.

Ví dụ 1.1.2. (i) *Cho $x(t) = t^2$, ở đây $t > 0$. Chúng ta có*

$$I_{0+}^{0.5} x(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)} t^{2.5}$$

với mọi $t > 0$.

(ii) *Cho $x(t) = \exp(t)$. Chúng ta có*

$$I_{0+}^{0.5} x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{0.5+j}}{\Gamma(j + 1.5)}$$

với mọi $t > 0$.

1.1.2 Đạo hàm phân thứ

Cùng với tích phân phân thứ, đạo hàm phân thứ là một trong hai khái niệm quan trọng của phép tính vi–tích phân phân thứ. Có nhiều khái niệm đạo hàm phân thứ đã được xây dựng. Tuy nhiên, đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo được dùng rộng rãi hơn cả. Sau đây chúng ta nhắc lại định nghĩa của hai loại đạo hàm này.

Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Người ta định nghĩa *đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α* của hàm $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ là

$$D_{a+}^{\alpha} x(t) := D^m I_{a+}^{m-\alpha} x(t), \qquad t \in (a, b],$$

ở đây $m := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$ là đạo hàm thông thường cấp m. Trong khi đó, *đạo hàm phân thứ Caputo cấp* α của hàm $x(t)$ được định nghĩa là

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}x(t) := I^{m-\alpha}_{a+}D^m x(t), \qquad t \in (a,b],$$

xem [5, Chapter 3, p. 49]. Đối với một hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))^{\mathrm{T}}$, đạo hàm phân thứ Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}x(t) := (^{C}D^{\alpha}_{a+}x_1(t), \dots, ^{C}D^{\alpha}_{a+}x_d(t))^{\mathrm{T}}.$$

Nhận xét 1.1.3. (i) Nếu α là một số nguyên, đạo hàm phân thứ cấp α (theo nghĩa Riemann–Liouville hoặc Caputo) chính là đạo hàm thông thường cấp α. Trong trường hợp $\alpha = 0$, chúng ta quy ước D^0_{a+} (hoặc $^{C}D^0_{a+}$) là toán tử đồng nhất.

(ii) Nếu x là một hàm liên tục tuyệt đối trên $[a,b]$, tức $x \in AC^1([a,b];\mathbb{R})$, thì các đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville và Caputo của hàm này tồn tại hầu khắp nơi trên $[a,b]$, xem [5, Lemma 2.12, p. 27] .

(iii) Khác với đạo hàm thông thường, đạo hàm phân thứ không có tính chất nửa nhóm. Cụ thể, cho α_1, α_2 là các hằng số dương bất kì và x là một hàm liên tục tuyệt đối trên đoạn $[a,b]$. Khi đó, nói chung chúng ta có

$$D^{\alpha_1}_{a+}D^{\alpha_2}_{a+}x(t) \neq D^{\alpha_2}_{a+}D^{\alpha_1}_{a+}x(t) \neq D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a+}x(t), \qquad t \in (a,b],$$

xem [5, p. 30] và [5, Remark 3.3, p. 56].

Với hàm x đủ chính quy, đạo hàm phân thứ là nghịch đảo trái của toán tử tích phân phân thứ.

Bổ đề 1.1.4. *([5, Theorem 2.14]) Cho $\alpha \geq 0$. Khi đó, với mọi $x \in L_1[a,b]$, chúng ta có*

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}x(t) = x(t)$$

với hầu hết $t \in [a,b]$.

Tuy nhiên, đạo hàm phân thứ nói chung không là toán tử nghịch đảo phải của tích phân phân thứ.